University "Politehnica" of Bucharest
Department of Mathematics & Informatics
Splaiul Independentei 313
060042 Bucharest, Romania

Clase de Operatori Neliniari pentru Probleme de Punct Fix cu Aplicaţii

Some Classes of Nonlinear Operators for Fixed Point Problems with Applications

Doctorand Cristian CIOBĂNESCU
E-mail: cciobanescu@upb.ro

Rezumatul tezei de doctorat

Sub îndrumarea Prof. Dr. habil. Mihai POSTOLACHE

Bucureşti, 15 mai, 2022

Cuvinte şi fraze cheie: operatori nonexpansivi; condiţia (C); condiţia (D); proprietatea Opial; procese iterative; convergenţă; stabilitate; dependenţa de date; problema defalcării; iteraţia S_n; algoritmul CQ; ecuaţii diferenţiale cu valori pe frontieră; metoda diferenţelor finite; spaţii vectoriale modulare; operatori Takahashi; spaţii CAT(0); conditiţia (E); semiplanul Poincaré.

2010 Mathematics Subject Classification: 47H09; 47H10; 54H25; 37C25.

Cuprins

Motivaţie şi introducere 5

1 Operatori cu condiţia (D) în spaţii Banach uniform convexe 15

1.1 Operatori nonexpansivi şi condiţia (D) 15

1.2 Exemple ilustrative 19

1.3 Puncte fixe şi rezultate de convergenţă 23

1.4 Un rezultat de stabilitate 26

1.5 Analiza dependenţei de date 29

2 Algoritm cu proiecţie parţială pentru problema defalcării 33

2.1 Chestiuni introductive şi preliminarii 33

2.2 Analiza convergenţei algoritmului propus 36

2.3 Exemple numerice şi simulare pe calculator 43

2.4 Adaptarea curbei la un set de date obţinute empiric 45

2.5 Aplicaţii la probleme cu valori pe frontieră 47

3 Operatori Takahashi în spaţii vectoriale modulare 51

3.1 Noţiuni introductive despre spaţiile vectoriale modulare 51

3.2 Operatori Takahashi modulari 54

3.3 Puncte fixe ale operatorilor Takahashi modulari 59

4 Operatori cu condiţia (E) în spaţii CAT(0) 63

4.1 Noţiuni introductive despre spaţiile CAT(0) 63

4.2 Puncte fixe comune pentru operatorii cu condiţia (E) 66

4.3 Exemple şi simulare numerică 73

Concluzii 81

Direcţii viitoare de cercetare 83

Bibliografie 85

Rezumat

Obiectivul general. Acest studiu este motivat de necesitatea găsirii unor clase generale de operatori adecvate pentru probleme de punct fix, alături de procese iterative versatile care fac posibilă determinarea numerică a soluţiilor atunci când existenţa acestora este asigurată. Această lucrare îşi propune să ofere o abordare consistentă a procesului iterativ în trei paşi S_n. Direcţia generală de studiu este analiza neliniară, iar principalele rezultate sunt legate de teoria punctului fix cu aplicaţii bazate pe modelare numerică. Concluziile rezultate în urma acestui studiu pun în evidenţă câteva caracteristici ale procesului studiat:

- *aspecte calitative (stabilitatea şi independenţa de date).* Procesele iterative sunt folosite în practică pentru a furniza algoritmi pentru determinarea soluţiilor pentru tot felul de probleme neliniare. Derularea algoritmilor este supusă perturbărilor induse de limitările sistemului informatic. Prin urmare, trebuie să ne asigurăm constant că aproximările făcute în timpul rulării algoritmului nu afectează în mod dramatic estimarea soluţiei. O analiză calitativă a unui proces iterativ în general, şi a procesului S_n în particular, este motivată de aceste obiective.

- *valoarea instrumentală.* O preocupare principală cu privire la procesele iterative supuse analizei este legată de convergenţa succesiunii de iteraţii către soluţia problemei studiate. De cele mai multe ori, rezultatele obţinute se referă la o convergenţă slabă. Cu toate acestea, prin introducerea de restricţii suplimentare pentru spaţiul pe care se lucrează sau pentru operatorul implicat în procesul iterativ, se pot obţine şi rezultate de convergenţă tare.

- *versatilitate.* Procesul iterativ S_n este adaptat la diverse medii de lucru: spaţii Hilbert, spaţii Banach uniform convexe, spaţii modulare sau spaţii CAT(0). De asemenea, sunt utilizate diferite clase de operatori generalizaţi nonexpansivi: operatori cu proprietatea (D), operatori Garcia-Falset (cu condiţia (E)), operatori cvasinonexpansivi, proiecţii metrice sau operatori Takahashi.

Metodologie. Metodele utilizate pentru efectuarea analizei procesului iterativ S_n sunt variate: studiul convergenţei se bazează pe unicitatea centrului asimptotic. Stabilitatea este analizată conform modelului oferit de Harder şi Hicks [14], iar analiza dependenţei de date foloseşte metoda iniţiată de Rus şi Mureşan [29]. Analiza comparativă privind eficienţa procesului studiat în raport cu alte iteraţii se realizează folosind tehnici polinomiografice. Coordonatele polare sunt folosite pentru a găsi expresia corectă a procesului iterativ pe semiplanul Poincaré. Algoritmii utilizaţi în aplicaţiile numerice sunt realizaţi folosind Matlab.

Contextul general. Este un fapt binecunoscut că diverse probleme de matematică aplicată pot fi exprimate prin intermediul sistemelor de ecuaţii. Evident, identificarea soluţiilor exacte este scopul principal. Cu toate acestea, destul de des, instrumentele matematice nu sunt suficient de dezvoltate pentru a oferi răspunsul adecvat pentru această problemă. Din acest motiv, ne mulţumim uneori cu mai puţin: ne propunem să confirmăm măcar existenţa şi, eventual, unicitatea soluţiei. Găsirea unei aproximări a soluţiei ar fi de asemenea o realizare importantă, mai ales dacă această determinare ar putea fi făcută numeric. Un instrument puternic în acest sens este Principiul Contracţiei al lui Banach. Acesta necesită, în primul rând, exprimarea problemei ca o ecuaţie cu punct fix într-un cadru bine definit (de obicei un spaţiu metric complet) astfel încât operatorul T utilizat în iteraţie să fie o contracţie. Pe lângă existenţa şi unicitatea soluţiei, Principiul contracţiei subliniază faptul că punctele fixe ale unei contracţii pot fi obţinute folosind iteraţiile Picard.

Cu toate acestea, proprietatea ca operatorul să fie contracţie este uneori prea restrictivă. Acesta este motivul pentru care, în ultimii 50 de ani, studiul punctelor fixe pentru clase mai generale de operatori a devenit o direcţie importantă şi foarte activă de cercetare. Cu toate acestea, spre deosebire de contracţii, iteraţiile succesive pentru un operator nonexpansiv nu converg neapărat la un punct fix. Deci, există o limitare majoră a iteraţiei Picard sub aspectul atingerii punctului fix. De aceea, studiul condiţiilor (generalizate) de nonexpansivitate a venit cu necesitatea furnizării de noi procese iterative. Un rezultat remarcabil pentru aproximarea punctelor fixe pentru un operator nonexpansiv a fost stabilit de Krasnosel'skii [21]. Rezultatul arată că dacă X este un spaţiu Banach uniform convex, iar $T\colon X \to X$ este un operator nonexpansiv, atunci iteraţiile succesive ale funcţiei $\frac{1}{2}(I+T)$ converg la un punct fix al lui T. Alte procese iterative importante au fost introduse de Mann [23] (formal acesta este o generalizare a iteraţiei Krasnosel'skii şi a rezultat prin înlocuirea parametrului de iteraţie cu un şir de numere reale), Ishikawa [15] (pentru a determina punctele fixe ale operatorilor pseudo-

contractivi Lipschitz pe spaţii Hilbert), Noor (un proces iterativ important în trei paşi cu scopul principal de a rezolva inegalităţile variaţionale), Sahu *şi alţii* (o nouă tehnică bazată pe iteraţii pentru rezolvarea problemelor de programare convexă şi de defalcare), iar lista poate continua.

Un aspect interesant este modul în care aceste procese iterative sunt asociate cu tot felul de operatori neliniari. De exemplu, Suzuki [32] a demonstrat un rezultat de convergenţă pentru operatorii cu condiţia (C) folosind procesul iterativ Krasnosel'skii. Thakur *şi alţii* [34] au utilizat un proces iterativ în trei paşi pentru a aproxima punctele fixe ale operatorilor nonexpansivi. În 2016, Thakur *şi alţii* [33] au introdus un proces iterativ în trei paşi prin intermediul a două şiruri parametrice pentru care se utilizează operatori de tip Suzuki. Puţin mai târziu, Sintunavarat şi Pitea [31] introduc iteraţia S_n bazată pe operatorii de tip Berinde. Acest ultim proces iterativ este tocmai cel supus unei cercetări aprofundate pe parcursul acestei teze.

Per total, definirea şi utilizarea proceselor iterative a fost sincronizată cu cele mai recente generalizări ale nonexpansivităţii. O primă condiţie semnificativă de nonexpansivitate generalizată, care a dat mai târziu tonul pentru studii ample în această direcţie, a fost dată de Suzuki [32], care a introdus condiţia (C) pe spaţiile Banach. Operatorii care îndeplinesc această proprietate, denumiţi în continuare operatori Suzuki reprezintă o clasă mai generală decât operatorii nonexpansivi, dar mai slabă decât clasa operatorilor cvasinonexpansivi. Mai apoi, Garcia-Falset *şi alţii* [13] propun două noi clase de operatori care îi generalizează pe cei cu condiţia (C); prima clasă este cea a operatorilor cu condiţia (E), fiind inspirat de o anumită proprietate a operatorilor Suzuki; a doua clasă a rezultat ca o extensie directă a definiţiei lui Suzuki, rezultând aşa-numita condiţie (C_λ). Alte proprietăţi importante de nonexpansivitate generalizată, inspirate de studiul lui Suzuki, au fost furnizate de Pant *şi alţii* [27]. Totuşi, operatorii propuşi, numiti operatorii nonexpansivi α-Reich-Suzuki, s-au dovedit a fi incluşi în clasa operatorilor care satisfac condiţia (E). Bejenaru şi Postolache [3] au contribuit de asemenea cu o condiţie de nonexpansivitate, numită condiţia (D), dovedind că operatorii de tip (D) satisfac şi condiţia (E) într-un spaţiu Banach.

În cele din urmă, studiile existente folosesc o varietate de structuri metrice. Studiul proceselor iterative legat de determinarea punctelor fixe pentru anumite clase de operatori nonexpansivi se realizează atât pe spaţii Banach, pe care există o structură uniform convexă (a se vedea [13],[22],[24],[27]) sau pe spaţii metrice mai generale, cum ar fi, de exemplu, spaţiile vectoriale modulare convexe (a se vedea [3],[17]), ori pe spaţii metrice curbate (a se vedea [11],[28]). În ceea ce priveşte problema defalcării, inega-

lităţile variaţionale, incluziunile variaţionale, studiul operatorilor de maxim monotoni şi aşa mai departe, cadrul obişnuit este cel al spaţiilor Hilbert sau al spaţiilor Banach înzestrate cu proprietăţi topologice (a se vedea [4],[5]-[7],[12],[19],[30]).

Descrierea tezei şi elemente de conţinut.

În Capitolul 1, **Operatori cu condiţia (D) în spaţii Banach uniform convexe** [8, 10] este analizată o condiţie de nonexpansivitate relativ nou introdusă, definită iniţial de Bejenaru şi Postolache [3] şi denumită condiţia (D). Un operator $T : C \to C$, unde C este o submulţime nevidă a unui spaţiu Banach satisface condiţia (D) dacă

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|,$$

pentru orice $x \in C$ şi $y \in C(T, x)$, unde

$$C(T, x) = \{Tp \,:\, p \in C, \|Tp - p\| \leq \|Tx - x\|\}.$$

În Lema 1 şi Lema 2 am analizat câteva proprietăţi elementare ale operatorilor cu condiţia (D). Exemplul 1 şi Exemplul 2 analizează relaţia dintre operatorii care îndeplinesc condiţiile (C) şi respectiv (D). În concluzie, clasa operatorilor care satisfac condiţia (D) nu este inclusă în clasa operatorilor Suzuki cu condiţia (C) şi astfel este subiniată relevanţa efectuării unui studiu al operatorilor cu proprietatea (D).

Lema 1. *Dacă T satisface condiţia* (D)*, atunci:*

$$||x - Ty|| \leq 3||Tx - x|| + ||x - y||, \ \forall\, x, y \in C.$$

Lema 2. *Fie operatorul T pe o submulţime nevidă C a unui spaţiu Banach X înzestrat cu proprietatea Opial. Prespunem că T satisface condiţia* (D)*. Dacă şirul $\{x_n\}$ converge slab la z şi $\lim\limits_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$, atunci $Tz = z$.*

Exemplul 1. Considerăm operatorul

$$T\colon [0,1] \to [0,1], \quad Tx = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \\ x, & x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

O analiză realizată cu atenţie demonstrează că operatorul T definit mai sus nu este de tip Suzuki, dar satisface condiţia (D).

Exemplul 2. Considerăm spaţiul Banach $X = L^\infty(\mathbb{R})$ cu norma $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}} |f| = \inf\{M : |f(x))| \leq M \text{ aproape peste tot pe } \mathbb{R}\}$. Fie C mulţimea tuturor funcţiilor $f\colon \mathbb{R} \to [0, 11]$, cu proprietatea că $f(x) = f(0)$, pentru orice $x \leq 0$, şi definim operatorul

$$T\colon C \to C, \quad Tf(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ \dfrac{4}{11} f(0), & x \leq 0, \quad f(0) \neq 11 \\ 5, & x \leq 0, \quad f(0) = 11. \end{cases}$$

Atunci T nu este un operator nonexpansiv, dar satisface ambele condiţii (C) şi (D). Este clar că cele două clase de operatori nu sunt complet disjuncte, deoarece ambele includ clasa operatorilor nonexpansivi. Totuşi, exemplul anterior demonstrează că există şi elemente comune care nu sunt neapărat operatori nonexpansivi.

Mai departe, acest capitol include şi un studiul al convergenţei bazat pe procesul iterativ S_n, pentru operatorii cu condiţia (D). Această iteraţie în trei paşi a fost introdusă în 2016 de Sintunavarat şi Pitea [31] pentru clasa operatorilor de tip Berinde. Pentru $x_1 \in C$ arbitrar ales, şirul $\{x_n\}$ este generat de următorul proces iterativ:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n) Tz_n + \alpha_n Ty_n \\ z_n = (1 - \gamma_n) x_n + \gamma_n y_n \\ y_n = (1 - \beta_n) x_n + \beta_n Tx_n, \end{cases} \tag{1}$$

pentru orice $n \geq 1$, unde $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ şi $\{\gamma_n\}$ sunt şiruri de numere reale în $(0, 1)$.

De menţionat ar fi că studiul convergenţei este realizat într-o manieră similară cu cea oferită de Thakur *şi alţii* [33]. Lema 3, Teorema 1, Teorema 2 şi Teorema 3 reprezintă rezultatele centrale de convergenţă.

Lema 3. *Fie C o submulţime nevidă şi convexă a unui spaţiu Banach X şi fie $T\colon C \to C$ un operator care satisface condiţia* (D)*, cu $F(T) \neq \emptyset$. Pentru $x_1 \in C$ arbitrar ales, fie $\{x_n\}$ şirul generat de iteraţia* (1)*. Atunci, limita $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ există, pentru orice $p \in F(T)$.*

Teorema 1. *Fie C o submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu Banach uniform convex X şi fie $T\colon C \to C$ un operator care satisface condiţia* (D)*. Pentru $x_1 \in C$ arbitrar ales fie $\{x_n\}$ şirul generat de iteraţia* (1)*, unde $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ sunt şiruri de numere reale într-un interval $[a, b]$, cu $0 < a \leq b < 1$. Atunci, $F(T) \neq \emptyset$ dacă şi numai dacă $\{x_n\}$ este mărginit şi $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$.*

Teorema 2. *Fie C o submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu Banach uniform convex X cu proprietatea Opial şi fie T şi $\{x_n\}$ ca în Teorema* 1*, cu condiţia suplimentară ca $F(T) \neq \emptyset$. Atunci, $\{x_n\}$ converge slab la un punct fix al lui T.*

Teorema 3. *Fie C o submulţime nevidă, compactă şi convexă a unui spaţiu Banach uniform convex X, şi fie T şi $\{x_n\}$ ca în Teorema 1. Dacă $F(T) \neq \emptyset$, atunci $\{x_n\}$ converge la un punct fix al lui T.*

Capitolul este completat cu o analiză calitativă a procesului iterativ S_n privind stabilitatea şi independenţa de date, care urmează îndeaproape modelele propuse de Harder şi Hicks [14] sau Rus şi Mureşan [29]. Rezultatele principale ale acestui capitol sunt incluse în Teorema 4, Teorema 5 şi Teorema 6. Teorema 4 dovedeşte faptul că procesul iterativ S_n (1) converge la unicul punct fix al unei contracţii T, pe când Teorema 5 probează stabilitatea iteraţiei folosite. În final, Teorema 6 oferă o estimare a abaterii punctului fix în funcţie de o eroare maxim admisă, dovedind independenţa de date.

Teorema 4. *Fie C o submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu Banach X şi fie $T\colon C \to C$ un operator contractiv. Fie $\{x_n\}$ un şir iterativ definit de procedura (1), cu $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ şi $\{\gamma_n\}$ în $(0,1)$, satisfăcând $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n\gamma_n = \infty$. Atunci, $\{x_n\}$ converge la unicul punct fix al lui T.*

Teorema 5. *Fie C o submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu Banach X şi fie $T\colon C \to C$ un operator contractiv. Fie $\{x_n\}$ un şir iterativ definit de procedura (1), cu $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ şi $\{\gamma_n\}$ în $(0,1)$ astfel încât $\alpha_n\beta_n\gamma_n \geq a > 0$, $\forall n$. Atunci, procesul iterativ (1) este T-stabil.*

Teorema 6. *Fie C o submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu Banach X şi fie $T\colon C \to C$ un operator contractiv cu punctul fix p. Fie $\tilde{T}$ un operator care aproximează operatorul T cu eroarea maximă admisibilă ε. Considerăm şirul $\{x_n\}$ generat de (1) şi definim şirul $\{\tilde{x}_n\}$ astfel*

$$\begin{cases} \tilde{y}_n = (1-\beta_n)\,\tilde{x}_n + \beta_n\tilde{T}\tilde{x}_n \\ \tilde{z}_n = (1-\gamma_n)\,\tilde{x}_n + \gamma_n\tilde{y}_n \\ \tilde{x}_{n+1} = (1-\alpha_n)\,\tilde{T}\tilde{z}_n + \alpha_n\tilde{T}\tilde{y}_n, \end{cases}$$

pentru un $\tilde{x}_1 \in C$ ales arbitrat, cu şirurile de numere reale $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, şi $\{\gamma_n\}$ în $(0,1)$, care satisfac $s_n = \beta_n(\alpha_n + \gamma_n - \alpha_n\gamma_n) \geq \dfrac{1}{\lambda - \theta}$ pentru $\lambda > \theta$.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \tilde{p}$, atunci

$$\|p - \tilde{p}\| \leq \frac{\lambda\varepsilon}{1-\theta}.$$

Se poate observa că Teorema 6 prevede doi parametri de control pentru abaterea de la soluţie: eroarea maximă admisibilă ε a operatorului de aproximare $\tilde{T}$ şi λ, care este

un element de control pentru coeficienţii iteraţiei. Este important de notat că s_n şi λ sunt invers proporţionale, iar abaterea $\|p - \tilde{p}\|$ şi λ sunt direct proporţionale. Folosind rescrierea $s_n = \beta_n[1 - (1 - \alpha_n)(1 - \gamma_n)]$, observăm că putem îmbunătăţi performanţa algoritmului (i.e., distanţa $\|p - \tilde{p}\|$ devine mai mică) dacă selectăm pentru α_n, β_n şi γ_n valori apropiate de 1.

În Capitolul 2, cu titlul **Algoritm cu proiecţie parţială pentru problema defalcării** [2, 8] este introdus un nou algoritm proiectiv în trei paşi care urmăreşte să rezolve problema defalcării (SFP). Această problemă specială, legată de multe alte probleme de optimizarea neliniară cum ar fi: ecuaţii cu punct fix, inegalităţi variaţionale, probleme de echilibru etc. a fost introdusă de Censor şi Elfving [7] în anul 1994. Contextul general pentru această problemă este dat de două spaţii Hilbert H_1 şi H_2, două submulţimi nevide, închise şi convexe C şi Q ale H_1 şi respectiv H_2, şi un operator liniar şi mărginit $A\colon H_1 \to H_2$. Problema poate fi descrisă matematic ca o procedură prin care dorim să identificăm punctele $x \in H_1$ astfel încât $x \in C$ şi $Ax \in Q$.

Censor şi Elfving [7] au propus şi câţiva algoritmi adecvaţi pentru rezolvarea unei clase de probleme inverse. La acel moment însă, munca lor nu a câştigat prea multă atenţie din cauza unui dezavantaj major: algoritmul lor necesita inversarea matricei la fiecare pas al iteraţiei. Ca o alternativă pentru această soluţie numerică, în [5] şi [6], Byrne sugerează o nouă metodă iterativă pentru rezolvarea SFP, denumită metoda CQ, care utilizează proiecţii ortogonale pe C şi Q (submulţimi ale spaţiilor aritmetice Euclidiene $\mathbb{R}^n$ şi respectiv $\mathbb{R}^m$). Această idee a reprezentat o îmbunătăţire majoră faţă de realizările autorilor Censor şi Elfving, deoarece nu mai implică inversarea matricei, ci doar proiecţii pe submulţimi închise şi convexe.

Algoritmul 1. Pentru un punct iniţial arbitrar ales $x_0 \in H_1$, şirul $\{x_n\}$ este generat de relaţia

$$x_{n+1} = P_C\left[I - \gamma A^T(I - P_Q)A\right]x_n, \quad n \geq 0,$$

unde P_C şi P_Q reprezintă proiecţiile corespunzătoare mulţimilor C şi respectiv Q, $0 < \gamma < \frac{2}{\rho(A^TA)}$, cu $A^T\colon H_2 \to H_1$ transpusa matricei A şi $\rho\left(A^TA\right)$ raza spectrală corespunzătoare operatorului A^TA.

Dacă ne gândim la un context mai general, în care H_1 şi H_2 sunt spaţii Hilbert infinit dimensionale, atunci A^T poate fi înlocuit de operatorul adjunct A^*. În acest caz totuşi, convergenţa Algoritmului CQ este de obicei slabă.

O modalitate posibilă de abordare a problemei de defalcare se bazează pe reformularea acesteia ca problemă de punct fix. Acest lucru deschide mai multe posibilităţi în

determinarea soluţiilor prin utilizarea proceselor iterative. De exemplu, în 2010 Wang şi Xu [37] au subliniat că algoritmul CQ ar putea fi privit ca un caz special al algoritmului Krasnosel'skii-Mann pentru aproximarea punctelor fixe ale operatorilor nonexpansivi. Această formă asigură însă doar convergenţa slabă către o soluţie a SFP. Mai departe, multe alte proceduri iterative au extins ideea de mai sus. Autorii au fost preocupaţi în principal să ofere condiţii din ce în ce mai puţin restrictive pentru a depăşi dezavantajul din [37] şi pentru a fi asigurată convergenţa (a se vedea, de exemplu, [12] sau [36]).

Având în vedere aceste aspecte istorice şi pornind de la recentele studii pe această temă [4, 12, 36] care conţin algoritmi pentru rezolvarea SFP bazaţi pe procesul iterativ TTP ([33]), introducem un nou algoritm pentru problema defalcării bazat pe procesul iterativ S_n (1). Ne vom referi la acest algoritm sub denumirea de algoritmul cu proiecţie parţială asociat procesului iterativ S_n (şi îl vom nota PPS_n). El este asemănător cu iteraţia originală S_n, cu excepţia ultimei etape, care include şi o proiecţie.

Algoritmul 2 (PPS_n)**.** Pentru un punct iniţial arbitrar ales $x_0 \in C$, şirul $\{x_n\}$ este definit de procesul iterativ:

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_C\left[(1-\alpha_n)Sz_n + \alpha_n Sy_n\right] \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n y_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Sx_n, \end{cases}$$

unde

$$S\colon H_1 \to H_1,\ S = I - \frac{2}{\|A\|^2}A^*(I - P_Q)A.$$

şi $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ sunt trei şiruri de numere reale cu elemente din $(0,1)$.

Analizând atent operatorul S definit prin intermediul Algoritmului 2, menţionăm şi dovedim mai multe proprietăţi, incluse în Lema 4 şi Lema 5.

Lema 4. *Dacă Ω este mulţimea soluţiilor pentru problema defalcării, atunci $\Omega = F(P_C S) = F(S) \cap C$.*

Lema 5. *Operatorul S introdus în algoritmul PPS_n este nonexpansiv.*

Mai departe, Teorema 7 prezintă rezultate referitoare la convergenţa slabă a Algoritmului 2 spre o soluţie a problemei. Demonstraţia este bazată pe Lemele 6 şi 7.

Lema 6. *Fie $\{x_n\}$ fie un şir generat de Algoritmul 2. Atunci, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ există pentru orice $p \in \Omega$.*

Lema 7. *Fie $\{x_n\}$ şirul definit în Algoritmul 2 cu α_n, $\beta_n \in [p,q] \subset (0,1)$, pentru orice $n \geq 1$. Atunci, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - Sx_n\| = 0$.*

Teorema 7. *Fie* $\{x_n\}$ *şirul definit în Algoritmul* 2 *cu* α_n, $\beta_n \in [p,q] \subset (0,1)$, *pentru orice* $n \geq 1$. *Atunci,* $\{x_n\}$ *converge slab la un punct* $p \in \Omega$.

În plus, prin intermediul operatorului nonexpansiv $T = P_C \circ S$ şi pe baza unor ipoteze suplimentare cu privire la aceasta, sunt furnizate unele rezultate de convergenţă tare în Teorema 8 şi în Teorema 9.

Teorema 8. *Fie* $\{x_n\}$ *şirul definit în Algoritmul* 2 *cu* α_n, $\beta_n \in [p,q] \subset (0,1)$, *pentru orice* $n \geq 1$. *Atunci,* $\{x_n\}$ *converge la un punct din* Ω *dacă şi numai dacă* $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \Omega) = 0$, *unde* $d(x_n, \Omega) = \inf_{p\in\Omega} \|x_n - p\|$.

Teorema 9. *Fie* $\{x_n\}$ *un şir definit de Algoritmul* 2 *cu* α_n, $\beta_n \in [p,q] \subset (0,1)$. *Dacă* $T = P_C \circ S$ *satisface Condiţia (A), atunci* $\{x_n\}$ *converge la un punct din* Ω.

În ultima parte a acestui capitol am prezentat mai multe exemple însoţite de simulări pe calculator. Exemplul 3 realizează o comparaţie între algoritmul CQ şi algoritmul nou introdus PPS_n.

Exemplul 3. Considerăm problema defalcării asimilată următoarelor date: $H_1 = \mathbb{R}^2$ şi $H_2 = \mathbb{R}^3$; submulţimile închise şi convexe C şi Q sunt discul unitate l_1 în $\mathbb{R}^2$ şi respectiv bila unitate l_2 în $\mathbb{R}^3$; operatorul liniar şi mărginit este dat de matricea 3×2

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 4 & -12 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Rolul acestei simulări este de a decide care dintre algoritmii CQ şi PPS_n necesită mai puţini paşi. Mai mult, pentru a obţine o perspectivă globală asupra eficienţei celor doi algoritmi, nu selectăm doar o estimare iniţială x_0, ci evaluăm întreaga mulţime C. Pentru a face acest lucru, utilizăm o tehnică folosită iniţial pentru a determina numeric rădăcinile polinoamelor complexe, numită polinomiografie (a se vedea [16]). Rezultatul este o figură care ilustrează comportamentul de convergenţă pentru cei doi algoritmi, ceea ce ne permite să comparăm eficienţa acestora şi să concluzionăm că algoritmul PPS_n converge mai rapid decât algoritmul CQ. Mai mult, imaginile rezultate ilustrează şi mulţimea soluţiilor pentru problema de defalcare.

Exemplul 4 pune în evidenţă o procedură de potrivire a unei curbe la un set de date măsurate, atunci când se tolerează o abatere maximă predefinită δ. Contribuţia majoră a acestui capitol este de a reformula această problemă de aproximare ca o problemă de defalcare, oferind astfel metode numerice pentru a o rezolva. Merită subliniat faptul

că aceste curbe de aproximare nu sunt neapărat aşa-numitele *curbe de regresie*. Există totuşi o coincidenţă, când abaterea acceptată este suficient de mică.

Exemplul 4. Considerăm pachetul de date inclus în tabelul de mai jos:

t	1	2	3	4
y	1	3	5	8

Dorim să găsim o dreaptă potrivită $f(t) = a + bt$, astfel încât abaterile valorilor prezise $f(t_i)$ faţă de măsurătorile exacte y_i, $i = 1, \ldots, 4$ să nu depăşească o toleranţă admisă δ. Această problemă este rescrisă mai întâi ca o problemă de defalcare, cu datele de intrare:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^t;\ x = (a, b)^t;\ y = (1, 3, 5, 8)^t;\ Q = y + [-\delta, \delta]^4.$$

În plus, originea $x_0 = (0, 0)$ este considerată ca estimare iniţială şi algoritmul PPS_n este aplicat pentru a ajunge la o soluţie. Ca rezultat, găsim dreptele de aproximare pentru diferite valori atribuite abaterii acceptabile δ.

La finalul acestui capitol, ne referim la metoda diferenţelor finite pentru o problemă cu valori la capete (BVP) de tipul:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad x \in [a, b],\ y(a) = y_a,\ y(b) = y_b.$$

Mai precis, reformulăm problema iniţială ca o problemă de defalcare, sub ipoteza unor erori de trunchiere controlate. Ca o aplicaţie pentru o astfel de abordare, Exemplul 5 prezintă o simulare numerică pentru o anumită BVP pentru a sublinia avantajele procedurii nou introduse faţă de clasicul algoritm CQ.

Exemplul 5. Considerăm problema cu valori la capete

$$y'' + xy' + y = 3x^2 + 2, \quad x \in [0, 1];\ y(0) = 0;\ y(1) = 1.$$

Pentru început să remarcăm faptul că funcţia $y(x) = x^2$ oferă o soluţie exactă. Pentru a obţine forma discretă, considerăm $h = \dfrac{1}{4}$ şi $x_i = \dfrac{i}{4}$, $i = 0, 1, \ldots, 4$, iar apoi aplicând metoda diferenţelor finite cu erorile incluse, ajungem la problema de defalcare:

$$\begin{pmatrix} -496 & 264 & 0 \\ 60 & -124 & 68 \\ 0 & 232 & -496 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in Q,$$

unde

$$Q = (35, 11, -221) + \varepsilon \cdot [-5/4, 5/4] \times [-6/4, 6/4] \times [-7/4, 7/4].$$

În primul rând, comparăm numărul de paşi de iteraţie care trebuie efectuaţi, precum şi timpul de rulare al algoritmului parţial proiectiv S_n pentru două valori atribuite erorii de trunchiere. După cum era de aşteptat, cu cât abaterea este mai mică, cu atât soluţia este mai precisă. În al doilea rând, rulăm ambii algoritmi (PPS_n şi CQ) pentru a realiza o comparaţie. Din nou, procedura PPS_n s-a dovedit a fi semnificativ mai avantajoasă decât procedeul CQ: numărul de paşi de iteraţie este foarte redus şi soluţia estimată este mai aproape de cea exactă.

În Capitolul 3, **Operatori Takahashi în spaţii vectoriale modulare** [8, 9], introducem noţiunea de operator Takahashi în cadrul spaţiilor vectoriale modulare şi sugerăm o modalitate de a determina punctele fixe ale acestuia.

Începuturile analizei modulare a fost marcată de câteva exemple practice de metrici generalizate pe spaţii de şiruri sau funcţii, oferite de Orlicz şi Birnbaum la începutul anilor 1930. O analiză profundă a spaţiilor funcţionale modulare şi adaptarea lor la teoria punctului fix a fost realizată de Kozlowski (1988) în [20] şi de asemenea de Khamsi şi Kozlowski în [18]. Totuşi, definiţia formală a spaţiilor vectoriale modulare (nu neapărat a spaţiilor de funcţii), aşa cum este cunoscută şi folosită astăzi, a fost stabilită de Orlicz şi Musielack în [25] şi [26]. Din acel moment, acest tip de spaţii devine o alternativă interesantă şi netrivială la spaţiile clasice Banach. Lucrările recente, care utilizează acest cadru special au legătură cu diferite condiţii de nonexpansivitate modulară (a se vedea Kassab şi Ţurcanu [17]).

În 2008, Kohsaka şi Takahashi [19] au introdus o nouă clasă de operatori pe spaţiile Banach, şi anume operatorii Takahashi. În acest fel, au generalizat clasa de operatori de tip ferm nonexpansivi. Un fapt interesant despre operatorii nou introduşi se referă la reprezentarea lor pe spaţiile Hilbert. Pornind de la această expresie particulară, adaptăm definiţia autorilor Kohsaka şi Takahashi la spaţii vectoriale modulare convexe şi oferim câteva proprietăţi ale acestei clase de operatori. Mai precis, în Definiţia 1 este introdusă noţiunea de operator Takahashi, ilustrată ulterior în Exemplul 6. În tot acest capitol presupunem că ρ este un modular convex care satisface condiţia Δ_2, iar prin μ înţelegem factorul modular asociat.

Definiţia 1. Fie C o submulţime nevidă a spaţiului modular X_ρ. O funcţie $T\colon C \to X_\rho$ care satisface inegalitatea

$$(1 + \mu^2)\mu^2\rho^2(Tx - Ty) \leq \rho^2(Tx - y) + \rho^2(x - Ty),$$

pentru orice x, $y \in X_\rho$ se numeşte *operator modular Takahashi*.

Exemplul 6. În spaţiul vectorial $\mathbb{R}$, considerăm funcţia

$$\rho\colon \mathbb{R} \to [0,\infty),\ \rho(x) = |x|\sqrt{|x|},$$

care în mod clar este un modular convex cu factorul modular $\mu = \sqrt{2}$.

Atunci, $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad Tx = \dfrac{x}{2}$ este un operator modular Takahashi.

Mai apoi, Lema 8, Lema 9 şi Propoziţia 1 prezintă câteva proprietăţi caracteristice ale acestei noi clase de operatori.

Lema 8. *Fie C o submulţime nevidă a unui spaţiu modular X_ρ şi fie $T\colon C \to C$ un operator modular Takahashi cu $F(T) \neq \emptyset$. Atunci T este un operator modular cvasinon-expansiv (i.e. $\rho(Tx - p) \leq \rho(x - p),\ \forall x \in C,\ p \in F(T)$).*

Lema 9. *Fie C o submulţime nevidă ρ-mărginită a spaţiului modular X_ρ şi $T\colon C \to C$ un operator modular Takahashi. Dacă $\{x_n\}$ este un şir cu elemente din C astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(Tx_n - x_n) = 0$ şi τ este funcţia de tip ρ a lui $\{x_n\}$, atunci:*

(i) *$\tau(Tx) \leq \tau(x)$, pentru orice $x \in X_\rho$;*

(ii) *T lasă şirurile de minimizare invariante (i.e. dacă $\{c_n\}$ este un şir de minimizare pentru τ, atunci $\{Tc_n\}$ va fi şi el şir de minimizare).*

Propoziţia 1. *Fie C o submulţime nevidă, convexă şi ρ-închisă a spaţiului modular ρ-complet X_ρ. Presupunem că ρ este* (UUC1) *şi satisface proprietatea lui Fatou. Considerăm funcţia de tip ρ, $\tau\colon C \to [0,\infty]$, a şirului $\{x_n\} \subset X_\rho$ şi mai presupunem că $\tau_0 = \inf\limits_{x\in C}\tau(x) < \infty$. Fie $\{c_n\}$ şi $\{d_n\}$ două şiruri de minimizare ale lui τ. Atunci,*

(i) *Orice combinaţie convexă a celor două şiruri de minimizare este tot şir de minimizare;*

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(c_n - d_n) = 0$.

Nu în ultimul rând, sunt stabilite rezultate de punct fix pentru operatorii modulari Takahashi în Lema 10, Teorema 10 şi Teorema 11. Mai precis, evaluăm soluţiile pentru ecuaţii cu punct fix care implică acest tip de operatori, bazându-ne pe procesul iterativ S_n (1). Scopul este de a demonstra că şirul iterativ rezultat, indiferent de estimarea iniţială, este un şir de aproximare pentru punctul fix şi, în cele din urmă, de a oferi condiţii pentru convergenţa şirului la un punct fix al operatorului Takahashi considerat.

Lema 10. *Fie C o submulţime nevidă, convexă şi ρ-mărginită a lui X_ρ şi fie $T\colon C \to C$ un operator modular Takahashi cu $F(T) \neq \emptyset$. Pentru un punct arbitrar $x_1 \in C$, considerăm şirul $\{x_n\}$ generat de procesul iterativ* (1). *Atunci, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n - p)$ există pentru orice $p \in F(T)$.*

Teorema 10. *Fie X_ρ un spaţiu modular ρ-complet şi C o submulţime nevidă, convexă, ρ-închisă şi ρ-mărginită a lui X_ρ. Presupunem că ρ este* (UUC1) *şi că satisface proprietatea lui Fatou. Fie $T\colon C \to C$ un operator modular Takahashi şi fie şirul $\{x_n\}$ generat de procesul iterativ* (1) *cu $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\} \subset [p,q] \subset (0,1)$. Atunci $F(T) \neq \emptyset$ dacă şi numai dacă $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n - Tx_n) = 0$.*

Teorema 11. *Fie C o submulţime nevidă, convexă şi ρ-compactă a spaţiului modular complet X_ρ şi fie ρ, T şi $\{x_n\}$ ca în teorema anterioară. Atunci, şirul $\{x_n\}$ ρ-converge la un punct fix a lui T.*

În Capitolul 4, **Operatori cu condiţia (E) în spaţii CAT(0)** [1, 8] studiem convergenţa procesului iterativ S_n pentru doi operatori Garcia-Falset, adaptaţi corespunzător pentru spaţii Hadamard, urmărind să identificăm astfel punctele fixe comune.

Un spaţiu CAT(0) este un tip specific de spaţiu metric geodezic, în care fiecare triunghi geodezic este cel puţin la fel de 'subţire' ca triunghiul său de comparaţie din planul euclidian. Această proprietate este inclusă formal în aşa-numita inegalitate CAT(0) şi în cele din urmă reprezintă sursa pentru curbura negativă. Notăm în special faptul că toate spaţiile pre-hilbertiene, precum şi spaţiile hiperbolice $\mathbb{H}^n$ reprezintă exemple netriviale de astfel de structuri.

Aşa cum am menţionat, Garcia-Falset *şi alţii* au introdus în [13] două condiţii distincte de nonexpansivitate, ambele cu scopul de a generaliza operatorii de tip Suzuki, condiţia (E_μ) şi respectiv condiţia (C_λ). Fiecare dintre ele a generat evoluţii importante în teoria punctului fix şi nu numai. Condiţia (E_μ) este analizată în legătură cu alte proprietăţi de nonexpansivitate [27], diverse procese iterative incluzând tehnici polinomiografice [35] sau în legătură cu probleme din teoria semnalelor [24]. Într-un spaţiu CAT(0) (X,d), această proprietate poate fi definită astfel: un operator $T\colon C \to X$ satisface condiţia (E_μ) dacă pentru orice $x, y \in C$, următoarea inegalitate este adevărată:

$$d(x,Ty) \leq \mu d(x,Tx) + d(x,y).$$

O proprietate importantă a spaţiilor CAT(0) specifică faptul că pentru orice două puncte date x, y şi pentru orice $t \in [0,1]$, există un unic punct $z \in [x,y]$ astfel încât $d(x,z) = td(x,y)$ şi $d(y,z) = (1-t)d(x,y)$ (a se vedea [11]). Acest unic punct este notat în continuare $(1-t)x \oplus ty$. Cu ajutorul acestui tip de combinaţie convexă şi folosind doi operatori T şi S care satisfac condiţia (E), adaptăm procesul iterativ S_n pe un spaţiu CAT(0) astfel: pentru o valoare arbitrară $x_1 \in C$, fie $\{x_n\}$ generat de următorul proces

iterativ

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)\, Sz_n \oplus \alpha_n T y_n \\ z_n = (1-\gamma_n)\, x_n \oplus \gamma_n y_n \\ y_n = (1-\beta_n)\, x_n \oplus \beta_n S x_n, \end{cases} \tag{2}$$

pentru orice $n \geq 1$, unde $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ şi $\{\gamma_n\}$ sunt şiruri de numere reale din $(0,1)$.

Lema 11 şi Lema 12 prezintă rezultate de bază referitoare la operatorii cu condiţia (E) în contextul iteraţiei S_n. În Teorema 12 şi în Corolarul 1 sunt oferite rezultate referitoare la Δ-convergenţă. În plus, folosind anumite ipoteze suplimentare pentru aceşti operatori, unele rezultate de convergenţă metrică sunt obţinute şi detaliate în Teorema 13 şi în Corolarul 2.

Lema 11. *Fie C o submulţime nevidă şi convexă a unui spaţiu complet CAT(0). Fie $T\colon C \to C$ şi $S\colon C \to C$ operatori cu condiţia (E) astfel încât $F \neq \emptyset$. Fie $\{x_n\}$ generat de procesul iterativ (2). Atunci $\lim_{n\to\infty} d(x_n, p)$ există, pentru orice $p \in F$, unde F reprezintă mulţimea punctelor fixe comune ale operatorilor T şi S.*

Lema 12. *Fie C o submulţime nevidă şi convexă a unui spaţiu complet CAT(0). Fie $T\colon C \to C$ şi $S\colon C \to C$ operatori cu condiţia (E) astfel încât $F \neq \emptyset$. Fie $\{x_n\}$ generat de procesul iterativ (2). Dacă $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ şi $\{\gamma_n\}$ sunt considerate astfel încât $0 < a \leq \alpha_n, \beta_n, \gamma_n \leq b < 1$, pentru $a, b \in (0,1)$, atunci $\lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$ şi $\lim_{n\to\infty} d(x_n, Sx_n) = 0$.*

Teorema 12. *Fie C o submulţime nevidă şi convexă a unui spaţiu complet CAT(0). Fie $T\colon C \to C$ şi $S\colon C \to C$ operatori cu condiţia (E) astfel încât $F \neq \emptyset$. Fie $\{x_n\}$ generat de procesul iterativ (2). Dacă $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ şi $\{\gamma_n\}$ sunt considerate astfel încât $0 < a \leq \alpha_n, \beta_n, \gamma_n \leq b < 1$, pentru $a, b \in (0,1)$, atunci $\{x_n\}$ Δ-converge la un punct fix comun p al operatorilor T şi S.*

Corolarul 1. *Fie C o submulţime nevidă şi convexă a unui spaţiu complet CAT(0). Considerăm $T\colon C \to C$ un operator cu condiţia (E) astfel încât $F(T) \neq \emptyset$. Fie $\{x_n\}$ generat de procesul iterativ (2) (în care se consideră S=T). Dacă $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ şi $\{\gamma_n\}$ sunt considerate astfel încât $0 < a \leq \alpha_n, \beta_n, \gamma_n \leq b < 1$, pentru $a, b \in (0,1)$, atunci $\{x_n\}$ Δ-converge la un punct fix al lui T.*

Teorema 13. *Fie C o submulţime nevidă, închisă, mărginită şi convexă a unui spaţiu complet CAT(0). Fie $T\colon C \to C$ şi $S\colon C \to C$ operatori cu condiţia (E) astfel încât $F \neq \emptyset$ şi $\{x_n\}$ generat de procesul iterativ (2). Dacă $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ şi $\{\gamma_n\}$ sunt considerate astfel încât $0 < a \leq \alpha_n, \beta_n, \gamma_n \leq b < 1$, pentru $a, b \in (0,1)$ şi, în plus, cei doi operatori satisfac condiţia (A'), atunci $\{x_n\}$ converge la un punct fix comun al T şi S.*

Corolarul 2. *Fie C o submulţime nevidă, închisă, mărginită şi convexă a unui spaţiu complet CAT(0). Fie $T\colon C \to C$ un operator cu condiţia (E) astfel încât $F(T) \neq \emptyset$. Fie $\{x_n\}$ generat de procesul iterativ (2) (în care se consideră S=T). Dacă $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ şi $\{\gamma_n\}$ sunt considerate astfel încât $0 < a \leq \alpha_n, \beta_n, \gamma_n \leq b < 1$, pentru $a, b \in (0,1)$ şi, în plus, operatorul T satisface condiţia (A), atunci $\{x_n\}$ converge la un punct fix al lui T.*

În final, Exemplul 7, Exemplul 8 şi Exemplul 9 includ unele simulări numerice pe planul Euclidian şi pe semiplanul Poincaré, bazate pe operatori care satisfac condiţii de nonexpansivitate generalizată.

Exemplul 7. Este foarte bine cunoscut că structurile pre-Hilbertiene (în particular axa numerelor reale $\mathbb{R}$ sau planul real bidimensional $\mathbb{R}^2$) sunt spaţii $CAT(0)$. Pentru început, vom consider pe $\mathbb{R}^2$ domeniul închis şi mărginit $[0,1]^2$, unde definim următorii operatori:

$$T\colon [0,1]^2 \to [0,1]^2, \quad Tx = (T_1(x_1), T_2(x_2)),$$

unde

$$T_1x = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+4}, & x \neq 1; \\ \dfrac{3}{5}, & x = 1; \end{cases}, \quad T_2x = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{2}, & x \neq 1; \\ \dfrac{3}{5}, & x = 1; \end{cases}$$

şi

$$S\colon [0,1]^2 \to [0,1]^2, \quad Sx = (S_1(x_1), S_2(x_2)),$$

unde

$$S_1x = \begin{cases} \dfrac{1-x^3}{4}, & x \neq 1; \\ \dfrac{4}{7}, & x = 1. \end{cases}, \quad S_2x = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2}, & x \neq 1; \\ \dfrac{4}{7}, & x = 1. \end{cases}$$

În prima parte a studiului se demonstrează că operatorii T şi S satisfac condiţiile $\left(E_{\frac{5}{2}}\right)$ şi respectiv $\left(E_{\frac{7}{3}}\right)$, pentru norma Euclidiană din $\mathbb{R}^2$. În cea de-a doua parte, pentru aceşti doi operatori folosiţi este aplicat procesul iterativ (2) pentru a determina punctele lor fixe comune şi numărul de iteraţii efectuate.

Exemplul 8. Pentru un număr real dat p, considerăm în semiplanul Poincaré $\mathbf{H}$ submulţimea $C = \{(p,x) \,:\, x > 0\} \subset \mathbf{H}$. Definim operatorul

$$T\colon C \to C, \quad T(p,x) = \left(p, \frac{1}{x}\right).$$

Atunci, T se dovedeşte a fi nonexpansiv pe C în raport cu metrica Poincaré d. Totuşi, T nu este nonexpansiv şi în raport cu metrica Euclidiană din $\mathbb{R}^2$.

Exemplul 9. Considerăm semiplanul Poincaré $\mathbf{H} = \{x = (x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_2 > 0\}$, cu metrica Poincaré

$$d(x,y) = 2\ln\left(\frac{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}+\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2+x_2)^2}}{2\sqrt{x_2y_2}}\right).$$

Definim operatorul $T\colon \mathbf{H}\to\mathbf{H}$, $\quad T(x_1,x_2)=(-x_1,x_2)$, care este nonexpansiv relativ la distanţa hiperbolică d.

Scopul acestui exemplu este de a aplica procesul iterativ (2), pentru o estimare iniţială $x^0 \in \mathbf{H}$ astfel încât să putem identifica punctele fixe ale operatorului T. Acest lucru presupune în primul rând să avem o imagine precisă a modului cum $z = (1-t)x \oplus ty$ poate fi calculat exact. Prin utilizarea coordonatelor polare şi pornind de la geodezicele semiplanului Poincaré, putem afirma că:

$$(1-t)x\oplus ty = \begin{cases} (p, x_2^{1-t}y_2^t), & \text{dacă } x_1 = y_1 = p; \\ \left(a + R\dfrac{1-\lambda^2(x,y,t)}{1+\lambda^2(x,y,t)}, R\dfrac{2\lambda(x,y,t)}{1+\lambda^2(x,y,t)}\right), & \text{dacă } x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

unde a, R şi $\lambda(x,y,t)$ sunt definite astfel:

$$a = \frac{(y_1^2+y_2^2)-(x_1^2+x_2^2)}{2(y_1-x_1)};$$

şi

$$R = \frac{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}\cdot\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2+x_2)^2}}{2|x_1-y_1|}.$$

$$\lambda(x,y,t) = \left(\frac{R+a-x_1}{x_2}\right)^{1-t}\left(\frac{R+a-y_1}{y_2}\right)^{t}.$$

Incluzând această formulă în procesul iterativ (2) şi rulând algoritmul pentru o valoare iniţială dată, am găsit soluţia aproximativă şi numărul de iteraţii necesare pentru estimarea unui punct fix al operatorului T.

Bibliografie

1. A. Bejenaru, **C. Ciobănescu**, *Common fixed points of operators with property (E) in CAT(0) spaces*, Mathematics, 2022, 10, 433.

2. A. Bejenaru, **C. Ciobănescu**, *New partially projective algorithm for split feasibility problems with application to BVP*, J. Nonlinear Convex Anal., 2022.

3. A. Bejenaru, M. Postolache, *A unifying approach for some nonexpansiveness conditions on modular vector spaces*, Nonlinear Anal. Modelling Control, 2020, 25, 827-845.

4. A. Bejenaru, M. Postolache, *Partially projective algorithm for the split feasibility problem with visualization of the solution set*, Symmetry, 2020, 12, 608-620.

5. C. Byrne, *Iterative oblique projection onto convex sets and the split feasibility problem*, Inverse Probl., 2002, 18, 441-453.

6. C. Byrne, *An unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction*, Inverse Probl., 2004, 20, 103-120.

7. Y. Censor, T. Elfving, *A multiplication algorithm using Bregman projections in a product space*, Numer. Algorithms, 1994, 8, 221-239.

8. **C. Ciobănescu**, *Some Classes of Nonlinear Operators for Fixed Point Problems with Applications*, University Politehnica of Bucharest, 2022 (PhD Thesis).

9. **C. Ciobănescu**, M. Postolache, *Nonspreading mappings on modular vector spaces*, U. Politeh. Buch. Ser. A, 2021, 83 (4), 3-12.

10. **C. Ciobănescu**, T. Ţurcanu, *On iteration S_n for operators with condition (D)*, Symmetry-Basel, 2020, 12, 1676-1691.

11. S. Dhompongsa, B. Panyanak, *On Δ-convergence theorems in CAT(0) space*, Comput. Math. Appl., 2008, 56, 2572-2579.

12. M. Feng, L. Shi, R. Chen, *A new three-step iterative algorithm for solving the split feasibility problem*, U. Politeh. Buch. Ser. A., 2019, 81, 93-102.

13. J. Garcia Falset, E. Llorens Fuster, T. Suzuki, *Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., 2011, 375, 185-195.

14. A. M. Harder, T. L. Hicks, *A stable iteration procedure for nonexpansive mappings*, Math. Japon., 1988, 33, 687-692.

15. S. Ishikawa, *Fixed points by a new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc., 1974, 44, 147-150.

16. B. Kalantari, *Polynomial root-finding amd polynomiography*, World Scientific, Hackensack, NJ, 2008.

17. W. Kassab, T. Ţurcanu, *Numerical reckoning fixed points of (ρE)-type mappings in modular vector spaces*, Mathematics, 2019, 7 (5), 390.

18. M. A. Khamsi, W. M. Kozlowski, *Fixed Point Theory in Modular Function Spaces*, Birkhauser/Springer, Cham, 2015.

19. F. Kohsaka, W. Takahashi, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math., 2008, 91, 166-177.

20. W. M. Kozlowski, *Modular Function Spaces*, M. Dekker, New York-Basel, 1988.

21. M. A. Krasnosel'skii, *Two remarks on the method of succesive approximations*, Uspekhi Math. Nauk, 1955, 10, 123-127.

22. G. Maniu, *On a three-step iteration process for Suzuki mappings with qualitative study*, Numer. Funct. Anal. Optim., 2020, 41 (8), 929-949.

23. W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, 506-510.

24. T. Mouktonglang, P. Charoensawan, R. Suparatulatorn, *A novel iterative scheme of operators with property (E) and its applications*, UPB Sci. Bull. Ser. A, 2021, 83, 45-54.

25. J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Springer - Verlag, Berlin, Germany, 1983.

26. J. Musielak, W. Orlicz, *On modular spaces*, Studia Mathematica, XVIII, 1959.

27. R. Pant, P. Patel, R. Shukla, M. De la Sen, *Fixed point theorems for nonexpansive type mappings in Banach spaces*, Symmetry, 2021, 13, 585.

28. S. Reich, Z. Salinas, *Metric convergence of infinite products of operators in Hadamard spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., 2017, 18, 331-345.

29. I. A. Rus, S. M. Mureşan, *Data dependency of fixed points set of weakly Picard operators*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 1998, 43, 79-83.

30. D. R. Sahu, A. Pitea, M. Verma, *A new iteration technique for nonlinear operators as concerns convex programming and feasibility problems*, Numer. Algorithms, 2020, 83, 421-449.

31. W. Sintunavarat, A. Pitea, *On a new iteration scheme for numerical reckoning fixed points of Berinde mappings with convergence analysis*, J. Nonlinear Sci. Appl., 2016, 9, 2553-2562.

32. T. Suzuki, *Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., 2008, 340, 1088-1095.

33. B. S. Thakur, D. Thakur, M. Postolache, *A new iterative scheme for numerical reckoning fixed points of Suzuki's generalized nonexpansive mappings*, Appl. Math. Comput., 2016, 275, 147-155.

34. B. S. Thakur, D. Thakur, M. Postolache, *A new iteration scheme for approximating fixed points of nonexpansive mappings*, Filomat, 2016, 30 (10), 2711-2720.

35. G. I. Uşurelu, A. Bejenaru, M. Postolache, *Operators with property* (E) *as concerns numerical analysis and visualization*, Numer. Funct. Anal. Optim., 2020, 41 (11), 1398-1419.

36. G. I. Uşurelu, *Split feasibility handled by a single-projection three-step iteration with comparative analysis*, J. Nonlinear Convex Anal., 2021, 22, 543-557.

37. F. Wang, H. K. Xu, *Approximating curve and strong convergence of the CQ algorithm for the split feasibility problem*, J. Inequal. Appl., 2010, Art. No. 102085.