Rezumatul tezei de abilitare
"Rezultate în Teoria Analizei Variaţionale cu Aplicaţii în Optimizare şi Control"

Prezenta Teză de Abilitare este organizată în 5 capitole. Ea este bazată pe propriile lucrări de cercetare, în calitate de autor unic sau în colaborare, și are trei direcții principale de cercetare: inegalități variaționale și probleme evolutive, probleme variaționale de control, și probleme de optimizare pe interval.

Capitolul 1 are două obiective științifice. Pe de o parte, în Secțiunea 1.1, suntem interesați să caracterizăm mulţimea de soluții slabe ascuțite asociată unei clase de inegalități variaționale controlate care este guvernată de funcționale de tip integrală curbilinie independentă de drum. Principalul element de noutate al acestui sub-capitol este reprezentat de spațiile de funcții de dimensiuni infinite care construiesc cadrul nostru matematic. Pentru studii similare cu privire la acest subiect, cititorul este direcționat către următoarele lucrări ale autorului: [S. Treanţă, Journal of Inequalities and Applications, (2020g)], [S. Treanţă, Journal of Mathematical Inequalities, (2020f)] și [S. Treanţă, S. Singh, Positivity, (2021)]. Pe de altă parte, în Secțiunea 1.2 din acest capitol, introducem o nouă clasă de inegalități variaționale diferențiale (pe scurt, IVD) guvernată de o inegalitate variațională și o ecuație de evoluție formulate în spații de funcţii cu dimensiuni infinite. Pe baza unui rezultat formulat de Browder, a teoriei controlului optimal, a măsurabilității aplicaţiilor cu valori mulţimi și a teoriei semigrupurilor, stabilim că mulţimea de soluții asociată problemei evolutive (IVD) este nevidă și compactă. Mai precis, studiem existența soluțiilor asociate problemei evolutive (IVD) în spații Banach reflexive separabile de dimensiune infinită. Mai mult decât atât, formulăm şi demonstrăm proprietăți importante ale mulţimii de soluții associate problemei evolutive (IVD), precum: semicontinuitatea superioară tare-slabă, măsurabilitatea superpozițională, compacitatea și convexitatea.

Acest capitol se bazează pe rezultatele originale obținute în următoarele lucrări: *On a class of controlled differential variational inequalities*, Applicable Analysis, (2021d), autor: S. Treanţă, şi *On a class of differential variational inequalities in infinite-dimensional spaces*, Mathematics, (2021e), autor: S. Treanţă.

În **Capitolul 2**, studiem proprietatea soluţiilor slabe ascuțite pentru mulţimea de soluții asociată unei probleme de tip inegalitate variațională divizată, introdusă de [Y. Censor, Numerical Algorithms, (2012)]. Mai precis, utilizând o relație de ordine parțială pe RxR și un produs vectorial pe spațiul produs H1xH2 (cu H1, H2 spații Hilbert reale), definim mulţimea de soluții slabe ascuțite pentru problema inegalității variaționale divizate considerate și o caracterizăm cu ajutorul unor funcții de proiecție (vezi Secțiunea 2.2). Pentru a ilustra importanța mulţimii de soluții slabe ascuțite definită anterior, demonstrăm proprietatea de convergenţă finită a unui şir generat de un algoritm iterativ pentru rezolvarea problemei inegalității variaționale divizate prin utilizarea mulţimii de soluții slabe ascuțite stabilite (vezi Secțiunea 2.3). În continuare, în Secțiunea 2.4, ca un caz special al problemei de tip inegalitate variațională divizată, investigăm, de asemenea, proprietatea de convergenţă finită a celebrului algoritm CQ, introdus de [C. Byrne, Inverse Problems, (2002)], pentru rezolvarea problemei de fezabilitate divizată utilizând conceptul de soluție slabă ascuțită. Dezvoltarea ulterioară a prezentului studiu este dată de explorarea și generalizarea modelului matematic divizat pentru a analiza eficiența modelelor matematice în termenii problemelor inverse divizate pentru rezolvarea problemelor legate de domeniul economic, cum ar fi problemele rețelei de trafic, problemele pieței energiei electrice, probleme de echilibru și multe altele.

Toate rezultatele acestui capitol sunt originale și publicate în *Characterization results of weak sharp solutions for split variational inequalities with application to traffic analysis*, Annals of Operations Research, (2021), autori: S. Singh, S. Treanţă.

Capitolul 3 este dedicat studiului a două direcții de cercetare și anume: (i) stabilirea unui criteriu minimal astfel încât orice soluție optimală locală să fie, de asemenea, o soluție optimală globală într-o anumită problemă de optimizare și (ii) buna-definire și buna-definire în sens generalizat pentru o clasă de probleme variaţionale de control cu restricţii izoperimetrice. În prima parte a acestui capitol (vezi Secțiunea 3.1), sunt investigate condițiile de optimalitate pentru o clasă de probleme variaţionale de control cu restricții de tip PDE&PDI. Mai exact, în ipoteze doar de continuitate ale funcționalelor implicate, se stabileşte un criteriu minimal pentru ca o soluție optimală locală a problemei variaționale de control considerate să fie soluția sa optimală globală. Pentru studii similare privind acest subiect, cititorul este direcționat către următoarele lucrări ale autorului: [S. Treanţă, Journal of Optimization Theory and Applications, (2021a)], [S. Treanţă, Annals of Operations Research, (2020k)] şi [S. Treanţă, Mathematics, (2019c)].

Cea de-a doua parte a acestui capitol (vezi Secțiunea 3.2) este dedicată studiului bunei-definiri şi a bunei-definiri în sens generalizat pentru o clasă de probleme variaționale de control cu restricţii izoperimetrice. În acest scop, introducem noi versiuni pentru conceptele de monotonie, pseudomonotonie și hemicontinuitate asociate funcționalei considerate de tip integrală curbilinie. Ulterior, definim mulţimea de soluții aproximative pentru clasa considerată de probleme variaţionale de control cu restricţii izoperimetrice. Folosind aceste elemente complet noi, formulăm și dovedim mai multe rezultate de caracterizare cu privire la buna-definire și buna-definire în sens generalizat pentru problema studiată. De asemenea, pentru a evidenția rezultatele teoretice și instrumentele derivate în acest sub-capitol, sunt oferite câteva exemple ilustrative.

Toate rezultatele acestui capitol sunt originale și publicate în *A necessary and sufficient condition on the equivalence between local and global optimal solutions in variational control problems*, Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications, (2020), autori: S. Treanţă, M. Arana-Jimenez, T. Antczak, şi *On well-posed isoperimetric-type constrained variational control problems*, Journal of Differential Equations, (2021c), autor: S. Treanţă.

În **Capitolul 4**, în cadrul unor noi ipoteze de convexitate generalizată, investigăm câteva conexiuni între o soluție LU-optimală a unei probleme variaționale de control, guvernată de o funcțională de tip integrală multiplă pe interval, și un punct șa asociat unei funcționale LU-Lagrange corespunzătoare unei probleme variaționale de control modificate pe interval. Elementele de originalitate ale acestui capitol includ (\rho, b, d)-invexitatea și (\rho, b, d)-pseudoinvexitatea asociate unei funcționale de tip integrală multiplă pe interval, noțiunea de funcțională LU-Lagrange, și formularea (cu ajutorul noilor concepte introduse de (\rho, b, d)-invexitate și (\rho, b, d)-pseudoinvexitate asociate unei funcționale de tip integrală multiplă pe interval) unor conexiuni între o soluție LU-optimală a problemei de optimizare pe interval și un punct șa asociat unei funcționale LU-Lagrange corespunzătoare unei probleme variaționale de control modificate pe interval. În prima parte a acestui capitol (vezi Secțiunea 4.1), în conformitate cu următoarele lucrări ale autorului: [S. Treanţă, Journal of Optimization Theory and Applications, (2021a)], [S. Treanţă, IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, (2021b)], [S. Treanţă, Symmetry-Basel, (2020a)], şi [S. Treanţă, Neural Computing and Applications, (2021f)], construim cadrul matematic și introducem problema modificată de optimizare pe interval. Principalele rezultate (vezi Teoremele 2 și 3 din Secțiunea 4.2), folosind noile concepte de funcțională LU-Lagrange și punctul șa asociat, oferă câteva rezultate de caracterizare a soluțiilor

LU-optimale pentru problema de optimizare pe interval considerată. Concret, demonstrăm că dacă funcționala obiectiv pe interval este 1-pseudoinvexă în (s0, c0) și (s0, c0; \lambda, \mu) este un punct șa pentru funcționala LU-Lagrange asociată cu problema variațională de control modificată pe interval, atunci (s0, c0) este o soluție LU-optimală în problema inițială de optimizare. De asemenea, stabilim că, dacă (s0, c0) este o soluție normală optimală în problema variațională de control considerată și funcționalale de constrângere sunt 1-invexe în (s0, c0), atunci (s0, c0; \lambda, \mu) este un punct șa pentru funcționala LU-Lagrange asociată cu problema modificată pe interval.

Acest capitol este bazat pe rezultatele originale obținute în lucrarea *Saddle-point optimality criteria involving (\rho, b, d)-invexity and (\rho, b, d)-pseudoinvexity in interval-valued optimization problems*, International Journal of Control, (2020j), autor: S. Treanţă.

Capitolul 5 prezintă evoluţia carierei academice, ştiinţifice şi profesionale, precum şi direcţiile principale de dezvoltare ale acesteia, în contextul global al realizărilor ştiinţifice semnificative şi de actualitate din domeniul de specialitate al autorului Tezei de Abilitare. De asemenea, este evidențiată capacitatea autorului de a coordona echipe de cercetare, de a organiza și gestiona activități didactice, de a explica și de a facilita învățarea și cercetarea.

Cuvinte cheie: inegalităţi variaţionale controlate; probleme evolutive; convergenţă; eficienţă; buna-definire; convexitate generalizată; probleme variaţionale de control; criterii de optimalitate; soluţii optimale locale şi globale; funcţională de tip integral multiplă/curbilinie independentă de drum; optimizare pe interval.

Clasificare Matematică 2020: 49J40; 49J20; 49J50; 49K20; 49K40; 58E30; 90C33.